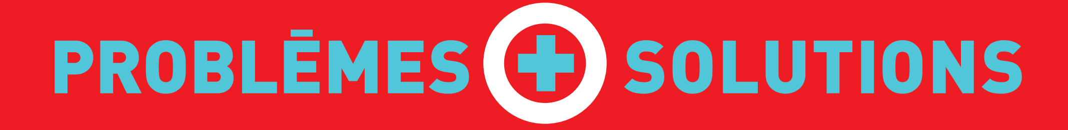
JEUX MATHÉMATIQUES

« LES JEUX SONT FAITS »



RTSDECOUVERTE.CH

≥ 12 ANS







RTSDECOUVERTE.CH

FAIRE DÉCOUVRIR LE MONDE AVEC PASSION ET EN S'AMUSANT

Le site **rtsdecouverte.ch** présente un contenu informatif et ludique : émissions de télévision, dossiers, liens Internet et jeux. Les dossiers thématiques (Solar Impulse, tremblements de terre, crise de l'euro, migration, climat, Noël, etc.) permettent de décoder et de mettre en perspective l'actualité du moment.

Un moteur de recherche et l'utilisation de mots-clés facilitent l'accès à l'information souhaitée.
Un sujet à creuser ?
Un exposé à préparer ?
Des questions à poser à des spécialistes ?
N'hésitez pas à explorer **rtsdecouverte.ch**

LE PROBLÈME DU MOIS

UN RENDEZ-VOUS RÉGULIER POUR JOUER AVEC LES MATHÉMATIQUES

Chaque mois, **rtsdecouverte.ch** et les chercheurs de l'Université de Genève vous proposent un problème de math. Géométrie, calcul ou logique : à vous de le résoudre !

Une adresse :
www.rts.ch/probleme-du-mois
Les solutions sont publiées dix jours après la parution du problème.

IMPRESSUM

Une édition originale de **RTSDECOUVERTE.CH**
Journaliste : Tania Chytil
Illustrateur : Jérômeuh/www.jeromeuh.net
Graphiste : www.evelynecerutti.com
Remerciements : Agathe Charvet, Emir Bisevac, Maximilien Bron et Julien Morel

Chercheurs de l'Université de Genève :
Shaula Fiorelli Vilmart, Pierre-Alain Cherix, Jan Lacki et Jean-Luc Dorier
Impression : Moléson Impressions, imprimé sur papier FSC, 3000 exemplaires

LES MATHS, C'EST FACILE…

…mais pas pour tout le monde diront certains. Et pourtant. Il ne s'agit parfois que d'un blocage ou de la conviction d'être nul en math pour « dilapider des années de bonheur » : celui de jouer avec les nombres, les formules, la géométrie et la logique.

NOUS AVONS IMAGINÉ CE CAHIER :

AMUSANT
Grâce aux dessins de Jérômeuh

DIVERTISSANT
Qui connaît les vies d'Euclide, de Pythagore, d'Abou Al-Khwarizmi, des hommes qui ont mis au point la base de nos mathématiques ?

UTILE
Quelques pages de formules indispensables de trigonométrie, d'algèbre et de géométrie.

C'est avec la collaboration précieuse des chercheurs de l'Université de Genève (Shaula Fiorelli Vilmart, Pierre-Alain Cherix et Jan Lacki) que nous avons pu vous proposer ces 40 pages d'exercices et de divertissement. Ainsi qu'avec le soutien de la Fondation Henri Moser, toujours prête à encourager les initiatives scientifiques et pédagogiques et de l'équipe de DiMaGe (Didactique des Mathématiques à Genève) de l'Université de Genève, partenaire du Projet européen Primas qui vise à promouvoir la démarche d'investigation dans l'enseigne-ment des mathématiques et des sciences.

Vous verrez, les pages se suivent et se mélangent pour alléger la matière, rendre le sourire à certains et persuader les plus réticents que les maths, c'est facile !

Tania Chytil





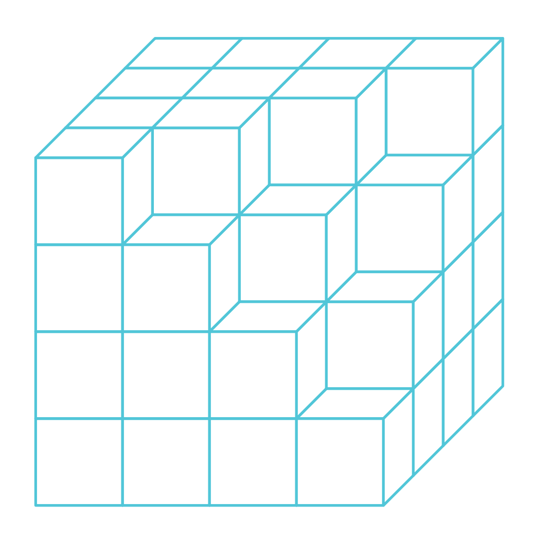


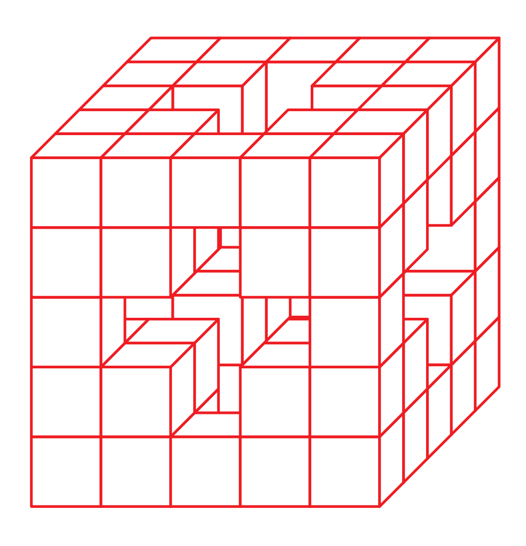
Ça fait une demi-heure que je suis entre le "44" et le "46" et je ne trouve pas!

PROBLÈME 1

UN P'TIT CUBE, DEUX P'TITS CUBES

DES PETITS CUBES ONT ÉTÉ RETIRÉS DU GRAND CUBE.
COMBIEN RESTE-T-IL DE PETITS CUBES ?





PROBLĒME 2

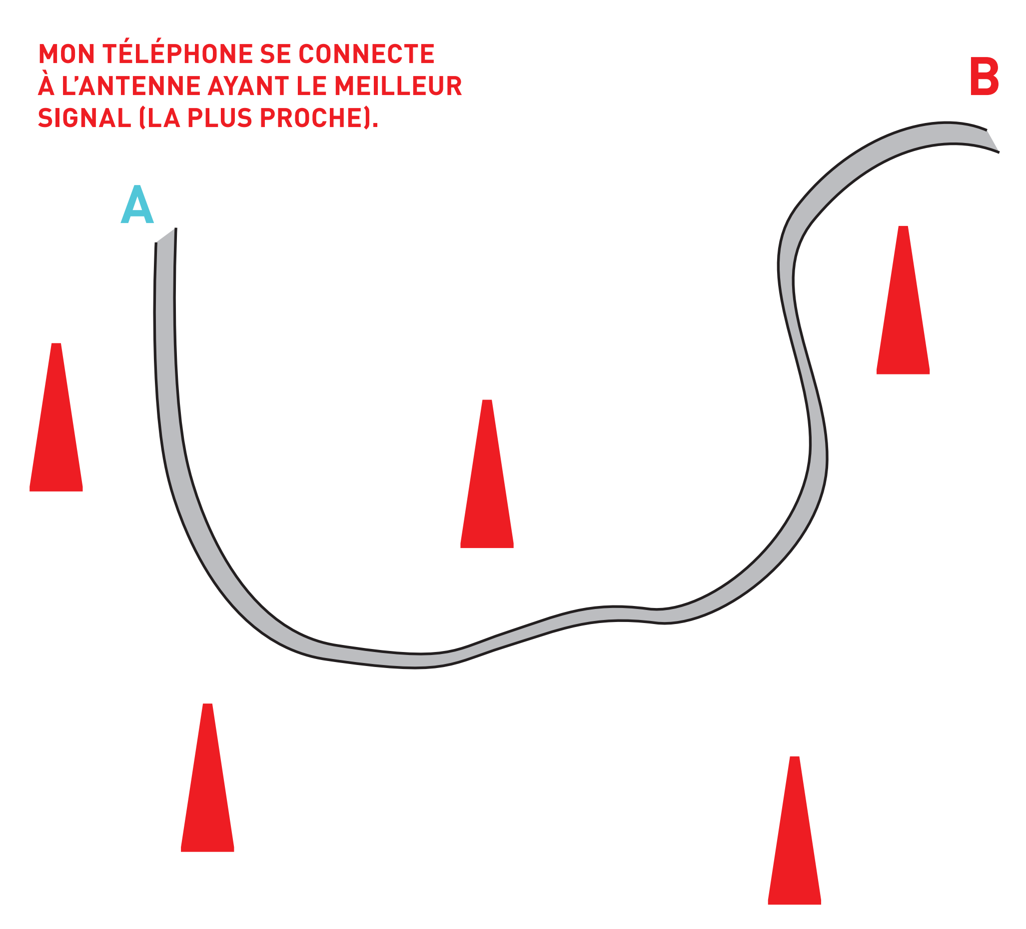
LA CONNEXION TĒLĒPHONIQUE

Les antennes de téléphonie mobile de Sundown sont toutes de même puissance et sont réparties dans une plaine selon le plan ci-dessous.

JE ME DÉPLACE SUR LA ROUTE DU POINT A AU POINT B.

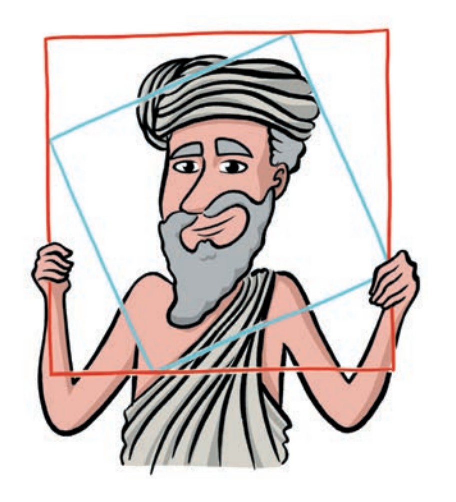
MON TÉLÉPHONE SE CONNECTE À L'ANTENNE AYANT LE MEILLEUR SIGNAL (LA PLUS PROCHE).

SUIVANT MA POSITION, SUR QUELLE ANTENNE MON TÉLÉPHONE VA-T-IL SE CONNECTER ?



PYTHAGORE

Samos env. 580 av. J-C / Metaponte env. 490 av. J-C



~ -600 Jardins suspendus de Babylone

~ -580 Naissance de Pythagore

La route de la soie entre la Chine et l'Occident se met en place

~ -490 Mort de Pythagore

Comme pour tous les personnages ayant vécu il y a si longtemps, il n'est pas toujours facile de démêler le vrai de la légende dans ce que l'histoire nous a légué sur Pythagore - y compris ses dates de naissance et de mort.

Pythagore est un savant grec. A l'époque, on est tout à la fois : philosophe, mathématicien ou physicien. Il n'y a pas de distinction comme aujourd'hui. On est tout simplement « amoureux de la connaissance » (philosophie : phileĩn = aimer, sophia = la sagesse, le savoir).

Les mathématiques remontent à plusieurs millénaires. Avant les Grecs, les Babyloniens et les Egyptiens étaient capables de résoudre des problèmes numériques ou géométriques parfois complexes. Mais ce qui caractérise les Grecs, dont Pythagore est un des plus anciens représentants, c'est d'avoir fait des mathématiques une discipline de l'esprit à l'égal de la philosophie et non uniquement un moyen de résoudre des problèmes pratiques.

Pythagore a beaucoup voyagé au sud de l'Italie, à Babylone et en Egypte, où il étudie les techniques héritées de ces civilisations pour résoudre des problèmes pratiques comme délimiter les champs recouverts par les crues du Nil. D'ailleurs, le terme géométrie veut dire « mesure de la terre ».

Après quarante ans de voyages, Pythagore décide de s'installer dans le sud de l'actuelle Italie, à Crotone. Là, il fonde une école, la fraternité pythagoricienne, qui cherche l'explication du monde par les nombres : les pythagoriciens vont, entre autres, tenter de comprendre les liens entre la musique, le mouvement des planètes et les nombres.

Pythagore s'éteint à près de 90 ans. Son école reste toutefois en activité durant 150 ans.

Et peu de temps avant... On raconte que les Jardins suspendus de Babylone existaient.

EUCLIDE

Alexandrie env. 325 av. J-C / Alexandrie env. 265 av. J-C



Les Celtes passent les Alpes, les Bretons s'installent en Angleterre et en Ecosse.

~ -325 Naissance d'Euclide

~ -265 Mort d'Euclide

Encore un grand penseur né il y a fort longtemps ! Et par conséquent, encore un personnage dont on ne connaît pas grand-chose si ce n'est qu'il a enseigné à Alexandrie.

Euclide est tout de même très connu grâce à son ouvrage intitulé *Les Éléments*.
Cet ouvrage comprend 13 volumes et fait non seulement la somme de nombreuses connaissances de mathématiques de l'époque, mais il apporte de nouveaux résultats. Ce qui en fait la plus grande force, c'est son organisation, sa systématisation et sa logique. Cet ouvrage est resté un modèle du genre jusqu'à des époques récentes.

En 1482, *Les Éléments* d'Euclide seront l'une des premières œuvres imprimées, après la Bible, et l'une des plus réimprimées ! C'est aussi le premier ouvrage occidental qui sera traduit en chinois en 1607.

C'est avant tout un grand ouvrage de géométrie mais on y trouve aussi les premières notions de théorie des nombres.

Les Éléments ont inspiré des générations de mathématiciens : de la résolution géométrique des équations du deuxième degré par les mathématiciens arabes jusqu'à la construction des réels par Dedekind (fin du 19ème siècle).

Le nom d'Euclide est resté attaché à l'axiome des parallèles. C'est en effet lui qui le premier a posé la nécessité d'admettre dans la géométrie classique le fait que par un point passe une et une seule parallèle à une droite donnée. Ce n'est qu'au 19ème siècle qu'on a compris qu'il existait d'autres géométries où il y a soit aucune, soit une infinité de parallèles à une droite donnée passant par un point donné.

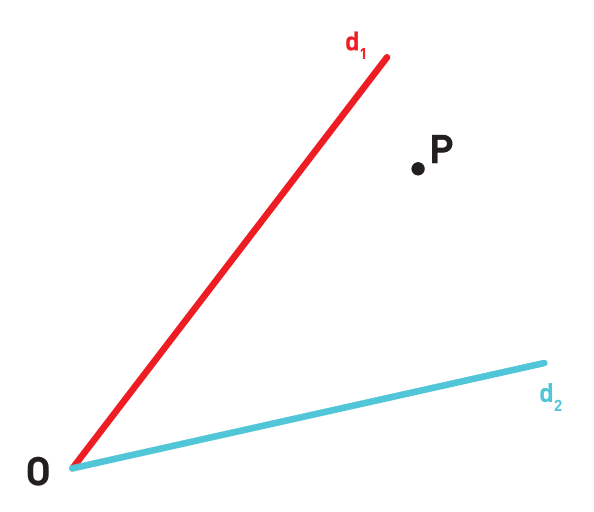
Et pendant ce temps... Les Celtes passent les Alpes et s'installent en Italie (actuelle).

PROBLĒME 3

GĒOMĒTRIE MINIMALISTE

Soient d_1 et d_2 deux demi-droites issues du même point O et soit un point P contenu dans le secteur angulaire défini par les demi-droites.

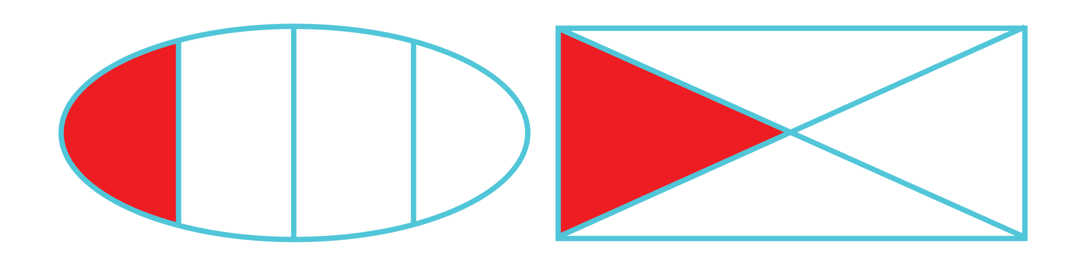
Construis le triangle de plus petit périmètre, de sommet P et dont les deux autres sommets sont respectivement sur chacune des demi-droites.



PROBLÈME 4

SURFACES

EST-CE QUE L'AIRE DE LA SURFACE ROUGE CORRESPOND AU QUART DE L'AIRE DE LA FIGURE ?



ARCHIMÈDE

Syracuse 287 av. J-C / Syracuse 212 av. J-C



~ -292 Le Colosse de Rhodes est érigé… à Rhodes

-226 Il s'effondre

~ -287 Naissance d'Archimède

~ -212 Mort d'Archimède

Archimède est aussi un géomètre ancien, presque contemporain d'Euclide dont il connaît bien l'œuvre. Mais il est également un des premiers ingénieurs. Il marie donc théorie et pratique.

Archimède entre au service du roi de Syracuse en qualité d'ingénieur militaire. Grâce à sa découverte de la loi des leviers, il est capable de construire des catapultes bien plus puissantes et des systèmes de traction avec lesquels il démontre qu'à l'aide de poulies et de leviers, l'homme peut soulever bien plus que son poids.

On raconte que, lors de la Deuxième Guerre punique, alors que Syracuse était assiégée par les Romains, Archimède aurait conçu et utilisé des miroirs concaves, capables de mettre le feu aux bateaux ennemis à distance, par concentration des rayons du soleil.

On raconte aussi qu'il serait sorti tout nu de son bain en criant « Eurêka » (j'ai trouvé !) à travers la ville. Il venait de découvrir ce que l'on nomme aujourd'hui le principe d'Archimède : « Tout corps plongé dans un liquide (ou un gaz) reçoit une poussée, qui s'exerce de bas en haut, et qui est égale au poids du volume de liquide déplacé ». On lui doit encore les premières approximations de la valeur de π à l'aide de calculs sur les périmètres et les aires de polygones réguliers. On lui attribue aussi l'invention de la vis et de l'écrou ainsi que le principe de la roue dentée.

La légende veut qu'Archimède ait été tué par un soldat romain à qui il avait demandé d'attendre la fin de son calcul.

Et pendant ce temps… Le Colosse de Rhodes, une immense statue représentant Hélios, le dieu du Soleil, s'effondre en 226 av. JC sous l'effet d'un tremblement de terre. Il se casse au niveau des genoux et tombe en morceaux. Aujourd'hui, il ne reste plus la moindre trace du colosse. C'était la sixième des sept merveilles du monde antique.

ABOU AL-KHWARIZMI

Khawarizm (Ouzbékistan) env. 780 / Bagdad env. 850



732 Victoire de Charles Martel à Poitiers
768 Charlemagne couronné Roi de France
780 Naissance d'Al-Khwarizmi
800 Charlemagne couronné Empereur d'Occident
850 Mort d'Al-Khwarizmi

On entre enfin dans l'ère des mathématiciens dont la vie n'est pas une suite de suppositions.

Abou Al-Khwarizmi est perse. On sait aujourd'hui que c'est lui qui, dans un ouvrage publié en 825, utilise pour la première fois l'expression mathématique « al-jabr » (de « jabara », réduire) qui donnera le mot français « algèbre ».

Saviez-vous que nos chiffres, ceux que nous appelons à tort « chiffres arabes », viennent en fait d'Inde ?
Là-bas, les savants ont eu l'idée de marier les neuf symboles 1 2 3 4 5 6 7 8 9 et le 0 avec leur position dans un nombre. Par exemple, dans « 205 », il n'y a pas de dizaines : le zéro marque cette absence.

C'est Abou Al-Khwarizmi qui décrit ce système numérique indien et l'usage du chiffre 0. C'est aussi grâce à ses travaux que le système décimal est introduit chez les Arabes et, plus tard, en Europe.

Abou Al-Khwarizmi étudie aussi les algorithmes, terme dérivé de son nom (il a été latinisé en Algorismus) et permet ainsi l'introduction des méthodes de calcul utilisant les chiffres arabes et la notation décimale.

Si les principaux apports de ce savant perse concernent les mathématiques, on ne doit pas oublier les études qu'il a menées en astronomie. Il élabore, à partir de tables hindoues de relevés astronomiques, un ensemble de tables indiquant les positions futures des étoiles et des planètes.

Et pendant ce temps... Le 25 décembre 800, Charlemagne est couronné Empereur d'Occident.

PROBLÈME 5

TIGRES ET PRINCESSES

Le roi d'une contrée lointaine se désespère : les prisons du royaume sont pleines et aucun prince des royaumes voisins n'est assez intelligent à son goût pour pouvoir épouser l'une de ses filles.
Son conseiller lui glisse à l'oreille :
« Et si vous régliez les deux problèmes en même temps ? Vous pourriez proposer à vos détenus de choisir logiquement entre deux cellules, l'une contenant un tigre, l'autre une de vos filles. Si le condamné choisit le tigre, il sera mangé, s'il choisit la princesse, il l'épousera ! ».
Le roi est conquis.
Le lendemain il se rend à la prison et explique le jeu aux prisonniers.

Le premier prisonnier est amené ; voici ce qu'il peut lire :

1	2
IL N'Y A PAS DE PRINCESSE DANS CETTE CELLULE	IL N'Y A AUCUN TIGRE

- « Mon roi, ces deux affiches sont-elles correctes ? »
- « Soit les deux affiches mentent, soit elles disent toutes deux la vérité », répond le roi. « Je te rappelle aussi que les cellules ne peuvent pas être vides. »

QUE DOIT RÉPONDRE LE PRISONNIER POUR POUVOIR ÉPOUSER LA PRINCESSE ?

Tandis que le roi change les affiches, on amène un autre prisonnier. Voici ce qu'il peut lire :

1	2
IL Y A UN TIGRE DANS L'AUTRE CELLULE	IL Y A UN TIGRE DANS UNE CELLULE

- « Mon roi, il y a trop de tigres dans vos affiches ! »
- « Ce que je ne t'ai pas encore dit, c'est que les affiches mentent s'il y a un tigre et disent la vérité s'il y a une princesse. »

QUE DOIT RÉPONDRE LE PRISONNIER POUR NE PAS ÊTRE DÉVORÉ ?

PROBLÈME 6

LE CHEVALIER DE MÉRÉ

Antoine Gombaud, chevalier de Méré, était un fervent adepte des jeux de dés. Il entreprit de jouer avec un autre gentilhomme selon les règles suivantes.

Chacun d'entre eux misait 32 pistoles (une monnaie de l'époque) sur l'issue d'un jeu de dés.

Méré pariait sur le 6, son ami sur le 4, le premier qui totalisait trois points empochait les 64 pistoles.

Méré venait de gagner son deuxième point, alors que son adversaire n'en avait qu'un, lorsqu'ils durent interrompre la partie.

Son adversaire proposa que chacun reprenne sa mise initiale. Comme il avait un certain avantage, le chevalier répondit : « Non, étant en meilleure posture, je m'attendais à gagner. Je devrais donc remporter le tout ! »

Son adversaire n'était évidemment pas d'accord avec cette solution. Ils s'accordèrent pour demander à Blaise Pascal comment résoudre équitablement ce litige.

QUELLE FUT LA RÉPONSE DE PASCAL ?

1 MÉRÉ REÇOIT 64 PISTOLES ET SON AMI AUCUNE ;

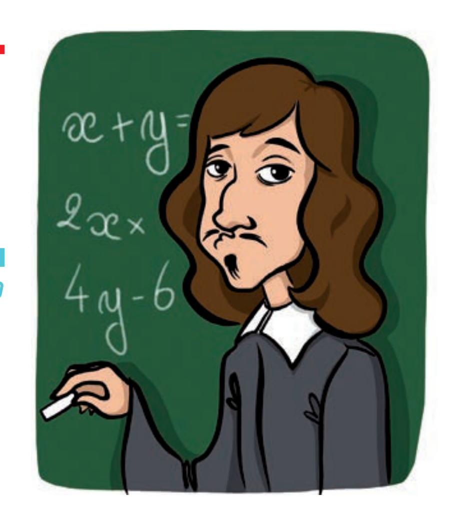
2 MÉRÉ EN REÇOIT 48 ET SON AMI 16 ;

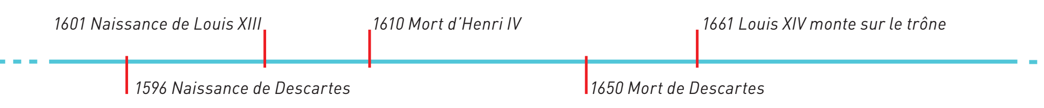
3 MÉRÉ EN REÇOIT 42 ET SON AMI 21 (ET UNE PISTOLE DE POURBOIRE AU SERVEUR) ;

4 MÉRÉ ET SON AMI EN REÇOIVENT 32 CHACUN.

RENÉ DESCARTES

La Haye en Touraine 31.03.1596 / Stockholm 11.02.1650





René Descartes est un philosophe, scientifique et mathématicien français. C'est un enfant plutôt maladif qui se fait remarquer par des dons intellectuels précoces.

Après ses études au Collège de La Flèche (au sud du Mans), il entre à l'Université de Poitiers où il obtient sa licence en droit en 1616. La carrière de juriste ne le tentant guère, il préfère l'armée. Il voyage ainsi à travers l'Europe.

De 1625 à 1628, René Descartes fréquente les milieux scientifiques et littéraires parisiens puis s'installe aux Pays-Bas. C'est là qu'il rédige l'essentiel de son œuvre scientifique et philosophique - dont le fameux *Discours de la méthode*.

L'apport principal de Descartes aux mathématiques ? Parmi d'autres, une vraie révolution : l'application des méthodes de l'algèbre aux problèmes traditionnels de la géométrie. Il invente le moyen d'exprimer les relations géométriques en équations algébriques, fondant ainsi ce que l'on appelle la géométrie analytique. Les coordonnées qu'il introduit sont appelées coordonnées cartésiennes. Vous vous en souvenez ? Les coordonnées (x ;y).

Et pendant ce temps... Les catholiques et les protestants ont officiellement cessé de se battre en France. Marie de Médicis règne sur le pays dès 1610 à la place de son fils Louis XIII, jugé trop jeune. En 1617, Louis XIII monte sur le trône et y reste jusqu'à sa mort en 1643. Louis XIV lui succède.

ISAAC NEWTON

Woolsthorpe 04.01.1643 / Londres 31.03.1727



Entre 1600 et 1700, des millions d'Africains sont déportés vers l'Amérique pour y devenir esclaves.

1602 Escalade à Genève

1643 Naissance de Newton

1685 Révocation de l'Edit de Nantes

1727 Mort de Newton

1761 Parution de la Nouvelle Héloïse de J.-J. Rousseau

Isaac Newton est un mathématicien, physicien et astronome anglais. C'est un élève peu attentif : il préfère observer la nature et montre très tôt une passion pour les sciences.

En 1665, la peste ravage l'Angleterre. Isaac Newton est à l'Université de Cambridge qui ferme ses portes. Newton rentre alors chez lui pour fuir l'épidémie et continue à étudier. C'est là qu'il fait ses plus grandes découvertes.

Newton est avec Leibniz l'inventeur du calcul infinitésimal (ou calcul différentiel et intégral). De ce fait, il peut être considéré comme le fondateur de l'analyse moderne. C'est en étudiant la dynamique du mouvement qu'il introduit et développe en parallèle le calcul infinitésimal. Cette théorie révolutionnaire lui permet de conceptualiser la théorie de la gravitation universelle. Cependant, il démontre ses découvertes grâce aux mathématiques d'Euclide, déjà connues, afin de leur rajouter de la crédibilité.

C'est aussi à cette période que, selon la tradition, il fait l'expérience de la pomme (voir page suivante). Mais Newton ne rapporte jamais cet événement qui n'est probablement qu'une légende. Reste qu'il découvre la loi de la gravitation universelle !

Mais ce n'est pas tout. Newton travaille dans le domaine de l'optique et développe une théorie de la lumière et des couleurs.

Il se passionne également pour l'alchimie et la théologie. Il passe notamment une quinzaine d'années à estimer, sur la base des écrits bibliques, la date (désormais passée) de la fin du monde.

En 1703, il est élu président de la Royal Society. La reine Anne d'Angleterre l'anoblit en 1705. Il devient Sir Isaac Newton.

LA POMME DE NEWTON

On raconte qu'en se promenant dans son jardin au clair de lune, Isaac Newton reçoit une pomme sur la tête et en déduit immédiatement la loi de la gravitation universelle. C'est vrai, pourquoi la lune ne tombe-t-elle pas sur la Terre comme les pommes tombent des arbres ? En fait, elle tombe sinon elle s'éloignerait de la Terre, emportée par sa vitesse. Elle est donc maintenue sur son orbite par une force : la gravitation.

QUE DIT LA LOI DE LA GRAVITATION UNIVERSELLE ?

« Les astres s'attirent de façon proportionnelle au produit de leur masse et inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare ».

Et pendant ce temps... Jean-Jacques Rousseau naît à Genève en 1712. Parution de Julie ou la Nouvelle Héloïse en 1761. Le succès est immédiat à Paris. Un an plus tard, l'Emile, son traité sur l'éducation, fait scandale. Ce livre est condamné par les autorités ecclésiastiques catholiques et réformées, de Paris à Genève.

PROBLĒME 7

POMMES - POIRES - ABRICOTS...

Voici une addition : chaque lettre représente toujours le même chiffre et chaque chiffre est représenté par une lettre distincte.

TOUS LES CHIFFRES DE 0 À 9 SONT DONC REPRÉSENTÉS.

TROUVE CE QUE L'ON A ADDITIONÉ.



LEONHARD EULER

Bâle 15.04.1707 / St-Pétersbourg 18.09.1783



Le 18 ème siècle est ce qu'on appelle « Le siècle des Lumières »

1787 Constitution des Etats-Unis

1707 Naissance de Euler

1783 Mort de Euler

Leonhard Euler est un mathématicien et physicien suisse. Mais il passe la plus grande partie de sa vie en Russie et en Allemagne. Il commence ses études à 13 ans à l'Université de Bâle où il apprend la philosophie, la théologie, les langues orientales et l'histoire.

C'est son père, Paulus Euler, qui lui enseigne les bases des mathématiques. Plus tard, Euler poursuit sa formation dans ce domaine avec pour maître Johann Bernoulli, un autre mathématicien suisse très célèbre.

L'œuvre d'Euler s'étend des mathématiques à la physique en passant par l'astronomie. Il travaille sur les orbites des planètes, les trajectoires des comètes mais aussi sur les phénomènes magnétiques, l'hydrodynamique, la nature ondulatoire de la lumière. En mathématique, il met au premier plan le concept de fonction – f(x). Il approfondit la théorie de Leibniz et base le calcul différentiel sur l'algèbre et l'arithmétique plutôt que sur la géométrie (dans *Intruductio in analysin infinitorum*). Il introduit la notion de fonction trigonométrique. C'est à lui encore qu'on doit la lettre ∑ (sigma) pour désigner une somme (summa en latin).

Il vit à Saint-Pétersbourg et à Berlin, villes dans lesquelles il fait chaque fois de très longs séjours (14 ans à Saint-Pétersbourg, 25 ans à Berlin puis retour à Saint-Pétersbourg durant 17 ans).

En 1738, il perd son œil droit puis le gauche en 1771 après l'échec d'une opération de la cataracte destinée à sauver sa vue.
Mais son ardeur au travail n'en est pas diminuée pour autant. Il rédige la moitié de son œuvre avec l'aide de secrétaires durant son second séjour à Saint-Pétersbourg.

Il est aussi reconnu comme étant un enseignant hors-pair, comme le démontre la fameuse phrase de Pierre-Simon Laplace : « Lisez Euler, lisez Euler, c'est notre maître à tous ! ».

On peut estimer que plus de la moitié des mathématiques étudiées aujourd'hui à l'école entre 12 et 15 ans est tirée de son œuvre.

A noter - pour ceux qui s'en souviennent - que Leonhard Euler était représenté sur les billets de banque suisses de 10 Frs entre 1980 et 2000.

Et pendant ce temps... La Suisse est une Confédération qui comprend 13 cantons (Uri, Schwytz, Unterwald, Zoug, Glaris, Appenzell, Zurich, Berne, Lucerne, Fribourg, Soleure, Schaffhouse et Bâle).

Le 31 mars 1723, le major Davel, un officier vaudois, prend d'assaut l'Hôtel de Ville de Lausanne pour libérer le pays de la domination bernoise. Il finit décapité.

Peu après, en 1740, dans le Jura, Pierre Péquignat est exécuté. Il avait pris la tête de la révolte des paysans contre le Prince-Evêque de Bâle. Celui-ci voulait contrôler les titres de propriété des terres et établir de nouvelles taxes (sel, céréales, ...) ce qui ne plaisait pas aux gens de la campagne qui allaient chasser et pêcher sur les propriétés princières. Ils ne voulaient pas non plus de nouveaux impôts. La révolte se termine donc par l'arrestation des meneurs avec l'aide de 400 dragons (soldats à cheval) envoyés en renfort par le roi de France Louis XV à la demande du Prince-Évêque.

CARL FRIEDRICH GAUSS

Brunswick 30.04.1777 / Göttingen 23.02.1855



1789 Révolution française
1804 Napoléon Ier Empereur des Français
1821 Mort de Napoléon Ier
1777 Naissance de Gauss
1855 Mort de Gauss

On le surnomme « le prince des mathématiciens ». Le petit Carl Friedrich Gauss vient d'un milieu très défavorisé mais il montre des talents scientifiques dès ses premières années scolaires. Il impressionne ses professeurs d'école. A 15 ans, le duc de sa région lui accorde une bourse pour poursuivre son instruction.

A 19 ans, il détermine comment partager une tarte en 17 parts égales à l'aide d'une règle et d'un compas, un problème connu et non résolu depuis des centaines d'années. Mieux, il démontre pour quels nombres ce partage à parts égales est possible, toujours muni d'une seule règle et d'un unique compas. On dit alors qu'il « caractérise les polygones réguliers constructibles à la règle et au compas ». Il en est tellement fier qu'il demande que le polygone régulier à 17 côtés soit gravé sur sa tombe.

Dans sa thèse de doctorat en 1799, il donne pour la première fois une preuve rigoureuse du théorème fondamental de l'algèbre (« Tout polynôme admet au moins une racine complexe »). Il contribue aussi de manière importante à la théorie des nombres et aux probabilités. Sa courbe (courbe de Laplace-Gauss) est très connue. Il est difficile de trouver un domaine des mathématiques qui n'ait pas été influencé par ses travaux.
Il est d'ailleurs considéré comme l'un des derniers mathématiciens connaissant la totalité des mathématiques de son temps.

Mais le génie de Gauss se manifeste dans d'autres domaines : en électricité, en optique, en théorie du potentiel.
Le « gauss » (G), par exemple, est devenu l'unité d'induction magnétique.

Et pendant ce temps... La Révolution française éclate en 1789. Elle nous lègue la Déclaration des droits de l'homme et du citoyen, qui proclame l'égalité des citoyens devant la loi, les libertés fondamentales et la souveraineté de la Nation. Mais la route vers la démocratie est encore longue.

PROBLÈME 8

LE TAPIS

Emmy est très fière de son nouveau tapis à la forme très particulière ; il est en effet formé d'un échiquier 8x8 collé à un échiquier 6x6. Cependant, elle a le sentiment qu'il ne s'accorde pas parfaitement avec la décoration de son salon. Elle convoque aussitôt son ami spécialiste en feng-shui pour un conseil. On sonne à la porte et Emmy se précipite :

Chérie, me voici arrivé à la rescousse de ton salon ! Il est magnifique ! Mais ce tapis doit disparaître !

Comment ça disparaître ? Tu sais combien il coûte ?

Peu importe, il déséquilibre toute l'harmonie de la pièce.

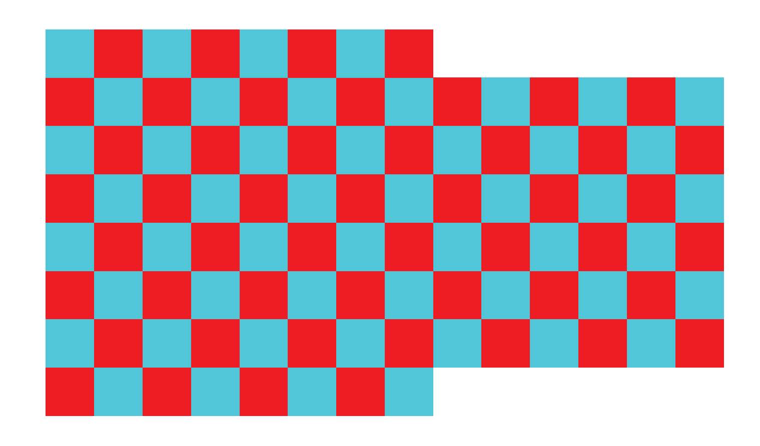
Il n'y aurait pas un moyen de le transformer pour que je puisse le garder ?

Il faut un carré ! Mais puisque 64 plus 36 égale 100, tu dois pouvoir le découper et le recoudre en un tapis carré de 10 carreaux de côté.

Tu veux que je découpe chaque carreau pour ensuite les recoudre ? Ça va en faire des pièces... !

100 pour l'exactitude... Mais je pense qu'il y a moyen de faire en beaucoup moins de pièces !

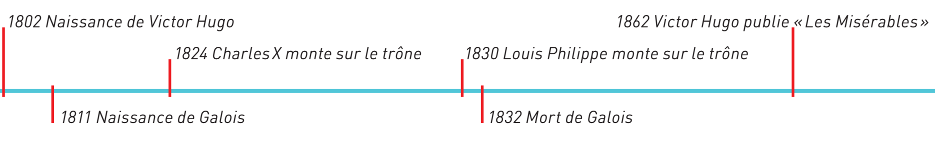
EN COMBIEN DE PIÈCES AU MINIMUM FAUT-IL DÉCOUPER LE TAPIS ?



ÉVARISTE GALOIS

Bourg-la-Reine 25.10.1811 / Paris 31.5.1832





Évariste Galois n'a que 20 ans quand il meurt.

Sa vie est si mythique et fascinante qu'on ne sait parfois déceler le vrai du faux. On l'a souvent considéré comme un mathématicien incompris de ses contemporains. On s'est rattrapé depuis, n'ayez crainte !

La mère d'Évariste l'instruit jusqu'à l'âge de 12 ans. Puis, il entre au Lycée Louis-le-Grand à Paris où la fureur des mathématiques le prend.

A 17 ans, il publie ses premiers travaux sur les fractions continues dans une revue prestigieuse mais rate son examen d'entrée à l'École Polytechnique.

Évariste Galois est un républicain actif. Il se fait exclure en 1831 de l'École préparatoire – future École Normale. Ce qui ne l'empêche pas de présenter à l'Académie des Sciences un mémoire sur la théorie des équations intitulé *Conditions pour qu'une équation soit résoluble par radicaux*. Cette question est un des graals des mathématiciens de l'époque.

En effet, trouver des formules explicites permettant de résoudre des équations de degré 5 ou plus est un objectif poursuivi par la communauté mathématique depuis que les algébristes italiens du XVème siècle ont donné de telles formules pour les équations de degrés 3 et 4.

Galois montre qu'une telle formule ne peut exister. Son mémoire est étudié mais refusé, jugé incompréhensible.

Dans la nuit du 29 mai 1832, il pressent que sa mort est imminente car il doit se battre en duel le lendemain matin pour une femme. Il veille toute la nuit et écrit plusieurs lettres à un ami.

Après avoir rapporté sa théorie des équations résolubles par radicaux, il termine en donnant un aperçu de ses derniers travaux et demande à son ami de faire imprimer cette lettre dans la Revue encyclopédique.

Le lendemain, lors du duel, il est touché à l'abdomen et meurt des suites de ses blessures à l'âge de 20 ans.

Ses travaux ne seront redécouverts qu'une dizaine d'années plus tard.
On dit aujourd'hui qu'ils étaient simplement trop modernes pour leur époque.

Et pendant ce temps… La France est secouée par de nouvelles révolutions. Napoléon Ier est mort depuis longtemps. Charles X (frère de Louis XVI) est au pouvoir en 1824. Louis-Philippe lui succède en 1830. On se bat entre royalistes et républicains. Quand nous vous disions que la route vers la démocratie était encore longue…

PROBLÈME 9

LES DÉS DE LA CHANCE

JOUER OU NE PAS JOUER, TELLE EST LA QUESTION…

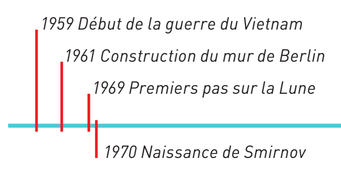
Je te propose le jeu suivant :
Pour lancer les deux dés, tu me donnes 1 franc.
Si tu obtiens un double 6, je te donne 20 francs, sinon je garde la mise.

JOUES-TU AVEC MOI ?

STANISLAS SMIRNOV

Saint-Pétersbourg 03.09.1970





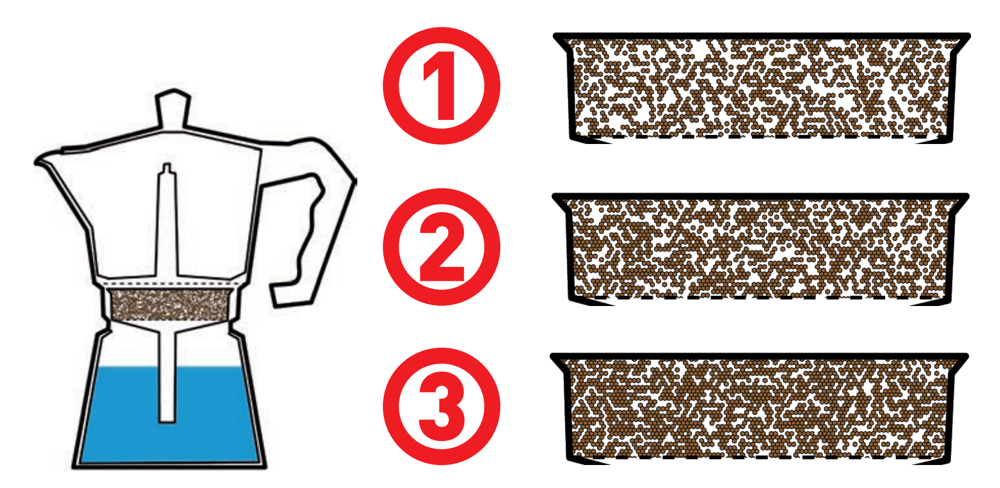
Stanislav Smirnov est le seul mathématicien présenté dans ce cahier à être encore en vie ! Il est russe et enseigne actuellement à l'Université de Genève.
Il étudie à Saint-Pétersbourg au lycée 239, une école spécialisée dans l'enseignement des mathématiques et de la physique. Pour lui, les mathématiques confèrent une liberté extraordinaire à la pensée. Et il aime ça.
A 16 puis 17 ans, il obtient par deux fois la médaille d'or aux Olympiades internationales de mathématiques pour l'URSS, chaque fois avec un score maximal de 42 points.
Il est diplômé de mathématiques à l'Université d'état de Saint-Pétersbourg en 1992. Comme beaucoup de savants soviétiques, il quitte le pays à l'effondrement de l'URSS. Il s'envole donc pour la Californie où il obtient sa thèse de doctorat au California Institute of Technology (Cal Tech). Suivront les universités de Yale, Princeton, le Max Planck Institute for Mathematics de Bonn et enfin le Royal Institute of Technology de Stockholm.
C'est en 2003 que Stanislav Smirnov devient professeur à l'Université de Genève et obtient, en 2010, la médaille Fields pour ses travaux dans le domaine de la mécanique statistique. C'est la première fois qu'un scientifique en activité dans une université helvétique reçoit un tel prix.
Ses recherches portent sur la percolation et visent notamment à modéliser l'écoulement de liquide à travers des matériaux poreux, comme le café. « Quel chemin prend l'eau quand elle traverse du café ? ». Question qu'on peut élargir à « quel chemin prend le feu dans une forêt ? Et comment planter les arbres pour éviter qu'un incendie se propage ? ».

Et pendant ce temps... A Berlin, le 9 novembre 1989, le Conseil des Ministres de la RDA (République Démocratique d'Allemagne) décide de l'ouverture du mur de Berlin et des frontières. Des milliers de Berlinois, de l'Est comme de l'Ouest, se regroupent autour du mur pour célébrer la fin de 28 ans de séparation.

PROBLÈME 10

UNE TASSE DE CAFÉ ?

ON A PRÉPARÉ TROIS CAFETIÈRES.
LAQUELLE CHOISISSEZ-VOUS POUR OBTENIR UN BON CAFÉ SERRÉ ?



QUELQUES PRÉCISIONS :
Vous vous souvenez des recherches de Stanislas Smirnov sur l'écoulement de l'eau dans une cafetière et sur les incendies de forêt ? Quel est le lien entre le fait de faire un bon café et la gestion des feux de forêt ? Les deux situations se modélisent de manière similaire grâce à une théorie mathématique appelée percolation.

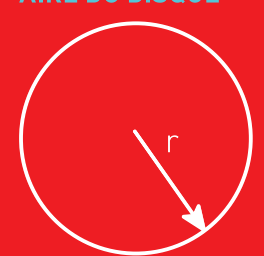
Pour obtenir un bon café, il faut avoir une mouture assez dense pour que l'eau la traverse lentement. Dans le cadre de la gestion d'une forêt, une question importante est de savoir si la forêt brûlera complètement en cas d'incendie. Les pompiers doivent savoir comment un feu déclenché à un certain endroit risque de se propager. Il existe bien sûr des conditions spécifiques à chaque situation (vent, topographie, type d'arbres), mais une caractéristique extrêmement importante est la densité d'arbres (= le nombre d'arbres à l'hectare). Plus cette densité est forte, plus le feu se propage facilement. Il est possible de déterminer une densité critique au-dessous de laquelle la forêt a peu de risques de brûler entièrement et au-dessus de laquelle la probabilité de destruction complète est forte. Ceci détermine des conditions de gestion de la forêt qui permettent de limiter les risques.

Les trois schémas de café ci-dessus font partie des outils utilisés par les mathématiciens pour analyser ces phénomènes.

FORMULES

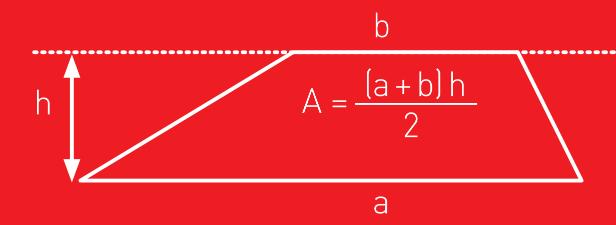
QUELQUES AIRES ET QUELQUES VOLUMES

AIRE DU DISQUE



$A = \pi r^2$

AIRE DU TRAPÈZE



$$A = \frac{(a+b)h}{2}$$

AIRE DU RECTANGLE



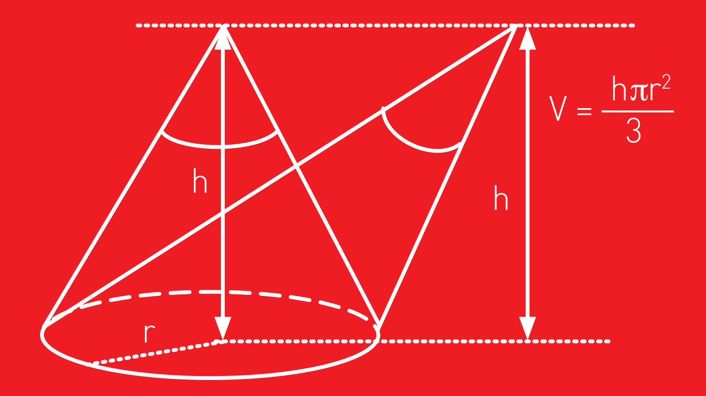
$A = ab$

AIRE DU PARALLÈLOGRAMME

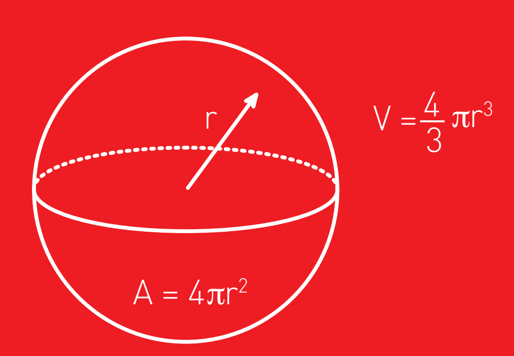


$A = ah$

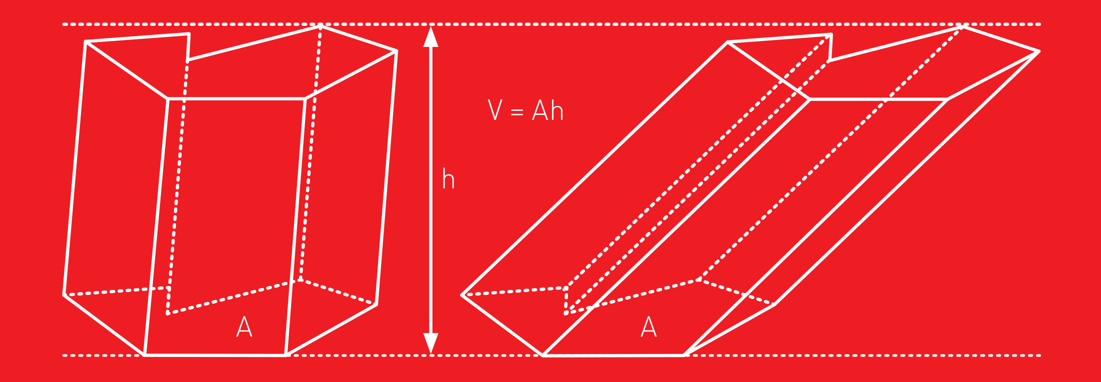
VOLUME DU CÔNE



VOLUME ET AIRE DE LA SPHÈRE



VOLUME DU PRISME DROIT



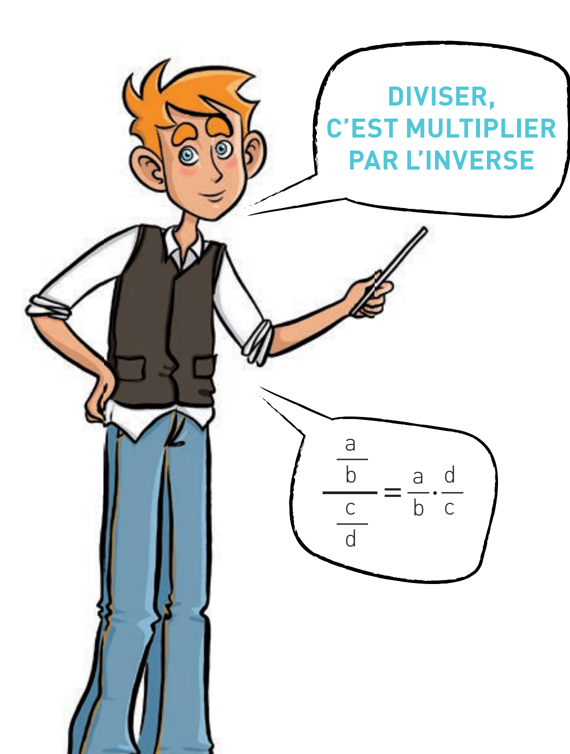
CALCUL

$(-1)\cdot(-1) = 1$

$\underbrace{a + a + \ldots + a}_{n \text{ fois}} = n \cdot a$

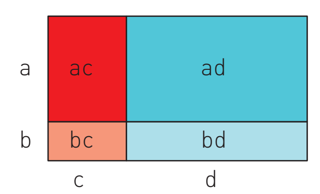
$\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fois}} = a^n$

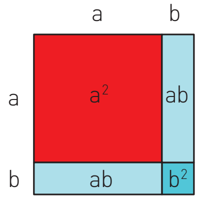
$1 + 2 + 3 \ldots + n = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$



ALGÈBRE
DISTRIBUTIVITÉ ET IDENTITÉS REMARQUABLES

$(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$

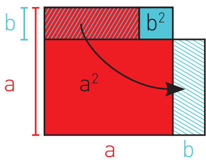




$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

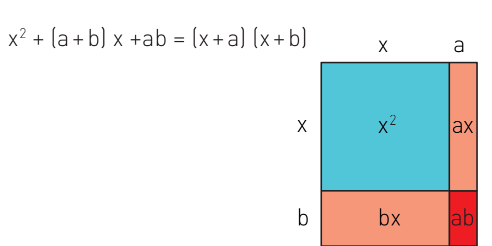
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a-b)^2$ ab ab a^2 b^2

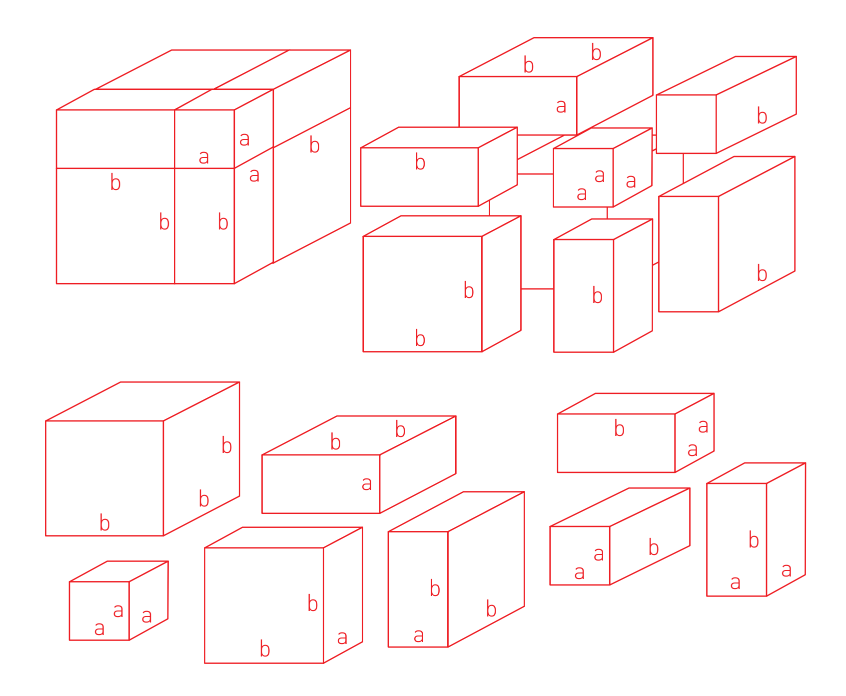


$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$



$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$



FORMULE DE VIÈTE

$ax^2 + bx + c = 0$

On calcule $\Delta = b^2 - 4ac$

Si $\Delta < 0$ l'équation n'a pas de solutions réelles

Si $\Delta = 0$ l'équation a une unique solution donnée par :

$$x = \frac{-b}{2a}$$

Si $\Delta > 0$ l'équation a deux solutions données par :

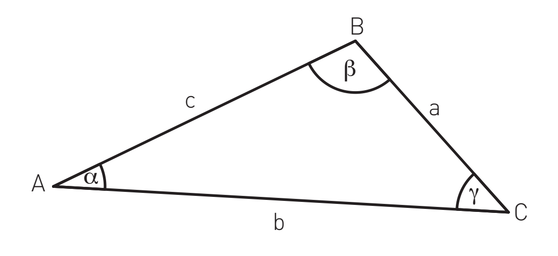
$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

SÉRIE GÉOMÉTRIQUE

$$1 + a + a^2 + ... + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \quad \text{pour } a \neq 1$$

RECETTE POUR BIEN NOTER LES DIMENSIONS D'UN TRIANGLE.

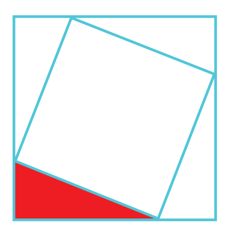
On commence par noter les sommets A, B et C.
On nomme ensuite a le côté opposé au sommet A, b le côté opposé au sommet B et c le côté opposé au sommet C.
Enfin, on note α l'angle en A, β l'angle en B et γ l'angle en C

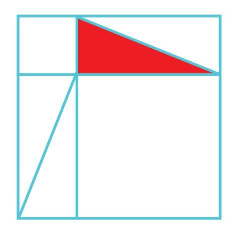


DEUX THÉORÈMES ET UNE DÉFINITION

THÉORÈME DE PYTHAGORE

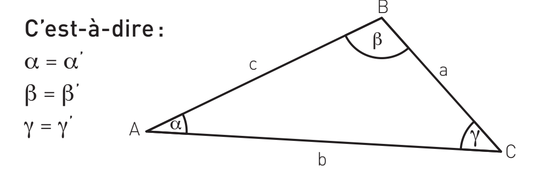
Si ΔABC est un triangle rectangle en C, alors $a^2 + b^2 = c^2$

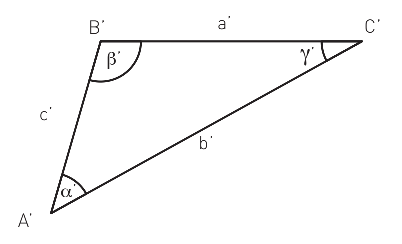




Définition :
Deux triangles sont **semblables** s'ils ont les mêmes angles.

C'est-à-dire :
$\alpha = \alpha'$
$\beta = \beta'$
$\gamma = \gamma'$





THÉORÈME DE THALÈS

Deux triangles sont semblables si et seulement si

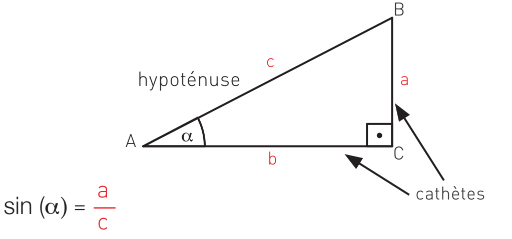
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

ET POUR LA BONNE BOUCHE
$e^{i\pi} + 1 = 0$

Cette égalité surprenante due à Euler a souvent été considérée comme une des plus belles relations mathématiques existantes. Elle relie par des opérations élémentaires classiques des nombres, parmi les plus fameux {0, 1, π, e, i}, apparus dans des contextes très différents.

TRIGONOMÉTRIE

Soit ΔABC un triangle rectangle en C
et α un des angles aigus.



On définit :

le **sinus** de α comme le rapport entre le côté opposé à α et l'hypoténuse (SinOpHyp)

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$$

le **cosinus** de α comme le rapport entre le côté adjacent à α et l'hypoténuse (CosAdjHyp)

$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$$

la **tangente** de α comme le rapport entre le côté opposé à α et le côté adjacent à α (TangOpAdj).

$$\tan(\alpha) = \frac{a}{b}$$

Remarquez que :
$0 < \sin(\alpha) < 1$
$0 < \cos(\alpha) < 1$

POUR ALLER PLUS LOIN

Les définitions ci-dessus permettent de calculer les sinus et cosinus d'angles α jusqu'à 90°. Or, lorsqu'un mathématicien a une définition qui s'applique seulement dans certains cas, il n'a qu'une idée en tête, c'est d'étendre la définition. Comment fait-il ?

Avant tout, il remarque que si l'hypoténuse a une longeur 1, sin(α) vaut la longueur du côté opposé et cos(α) vaut la longueur du côté adjacent. Ainsi, si le point A est à l'origine d'un système de coordonnées, le point B aura (cos(α),sin(α)) comme coordonnées.

Ensuite, le mathématicien place un cercle de rayon 1 centré en l'origine; le point B est donc sur le cercle. En plus, pour tout triangle rectangle dont l'hypoténuse est de longueur 1 et placé de la même manière, le point B sera sur le cercle et ses coordonnées seront (cos(α),sin(α)).

Enfin, le mathématicien oublie le triangle et a trouvé sa généralisation : les coordonnées du point d'intersection d'un rayon du cercle faisant un angle α avec l'axe horizontal représentent le sinus et le cosinus de l'angle α.

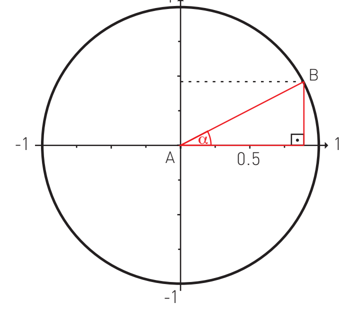
QUELQUES PROPRIÉTÉS DES SINUS, COSINUS ET TANGENTES

$-1 \leq \sin(\alpha) \leq 1$ $\quad -1 \leq \cos(\alpha) \leq 1$ $\quad \tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

Grâce au Théorème de Pythagore : $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$

$\cos(\alpha) = \sin(\llcorner - \alpha)$ (où $\llcorner$ est la mesure de l'angle droit soit 90°)

$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$
$\sin(2\alpha) = 2\cos(\alpha)\sin(\alpha)$



$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$
$\sin(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta)$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

SOLUTIONS

DES PROBLĒMES

« LES JEUX SONT FAITS »

RTSDECOUVERTE.CH

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



Avec le soutien
de la Fondation Henri Moser



Salut.

Hey, je ne savais pas que tu avais un chien.

Il est super mignon.

Tel chien, tel maître!

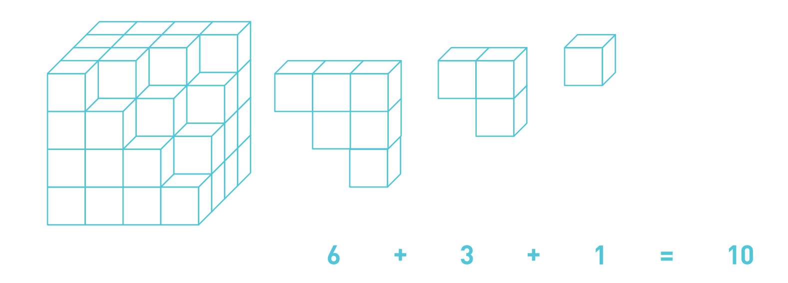
C'est vrai que vous avez la même haleine...

SOLUTION 1

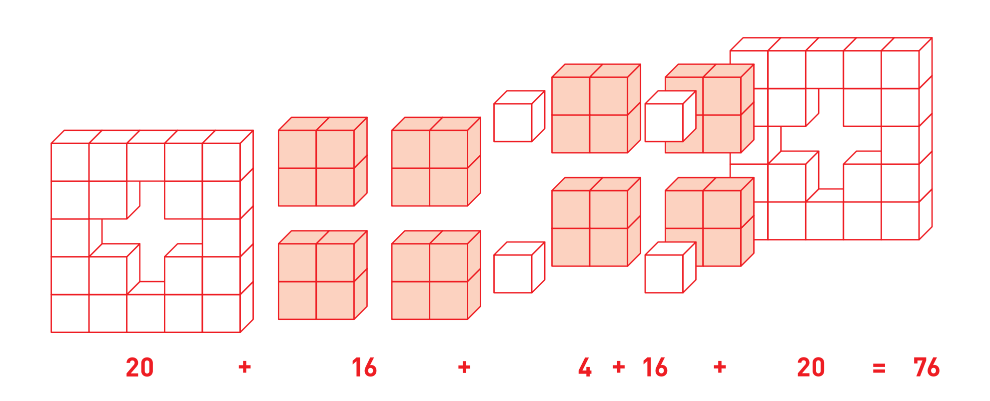
UN P'TIT CUBE, DEUX P'TITS CUBES

VOICI LES CUBES ÉCLATÉS POUR QU'ON PUISSE MIEUX COMPTER LES PETITS CUBES.

IL MANQUE 6 + 3 + 1 = 10 CUBES
COMME LE CUBE EST DE CÔTÉ 4, IL RESTE 64 - 10 = 54 PETITS CUBES

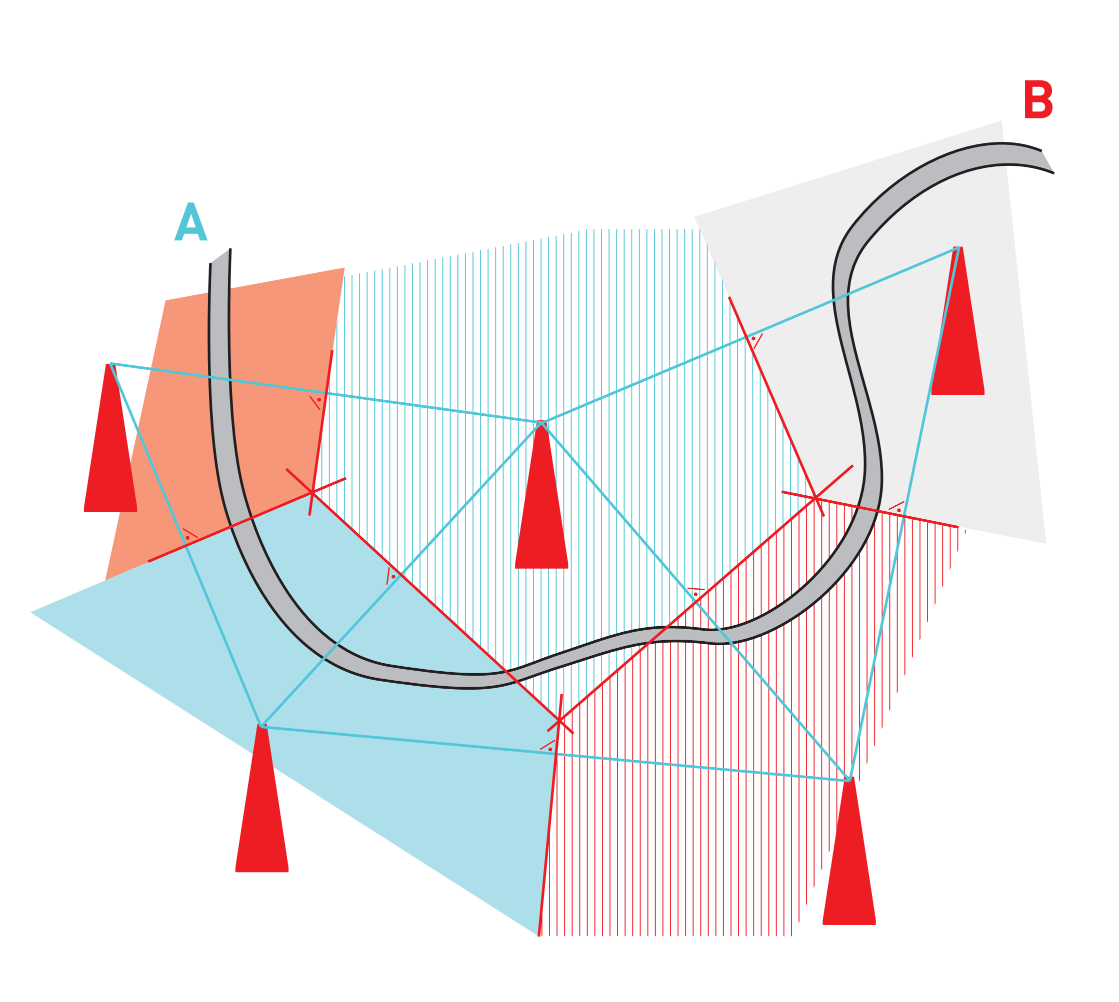


IL RESTE 20 + 16 + 4 + 16 + 20 = 76 CUBES



SOLUTION 2

LA CONNEXION TĒLĒPHONIQUE

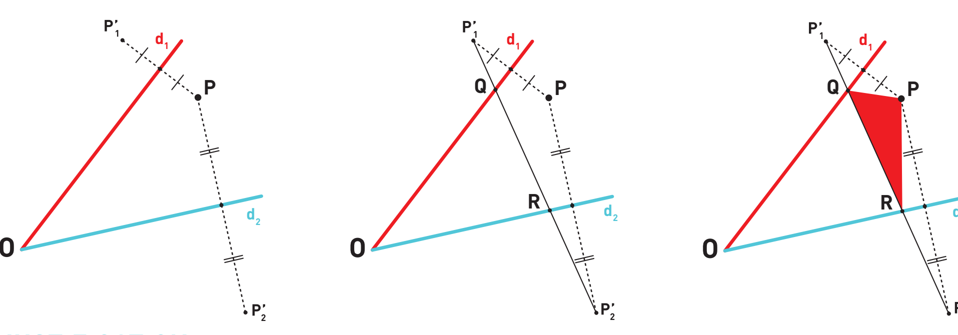


SOLUTION 3

GĒOMĒTRIE MINIMALISTE

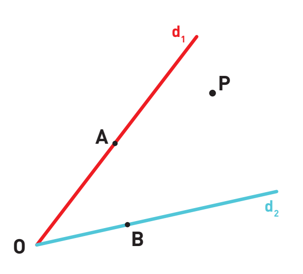
CONSTRUCTION :

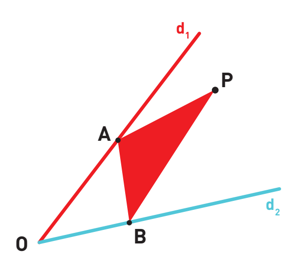
On construit P'_1 et P'_2 les symétriques du point P par rapport aux droites d_1 et d_2 respectivement. On construit la droite passant par P'_1 et P'_2 . Cette droite croise les droites d_1 et d_2 respectivement en Q et R.
Le triangle cherché est le triangle ΔPQR.

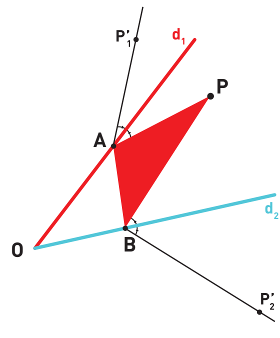


JUSTIFICATION :

Choisissons un point A sur d_1 et un point B sur d_2 et étudions le triangle ΔPAB.
On construit le segment symétrique de PA par rapport à d_1 en reportant l'angle entre PA et d_1 puis en reportant la distance entre P et A. On obtient le point P'_1 (qui est exactement le symétrique de P construit plus haut). On fait de même pour le segment PB.
Le périmètre du triangle est égal à la longueur $\overline{P'_1A} + \overline{AB} + \overline{BP'_2}$. Il s'agit maintenant de minimaliser cette longueur. Comme la droite est le plus court chemin entre deux points, la longueur $\overline{P'_1A} + \overline{AB} + \overline{BP'_2}$ est la plus courte lorsque les points A et B sont sur la droite reliant P'_1 et P'_2.

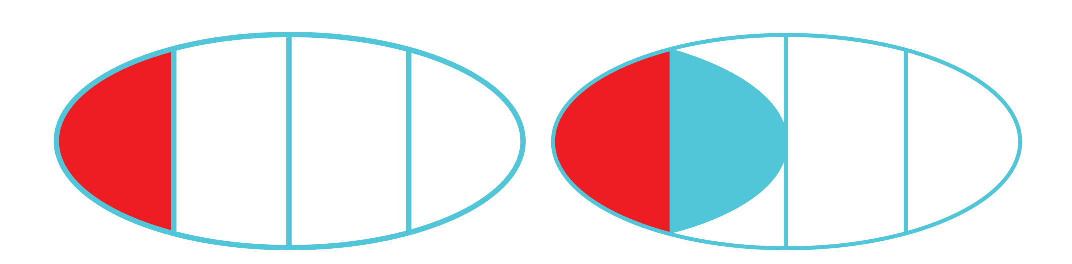




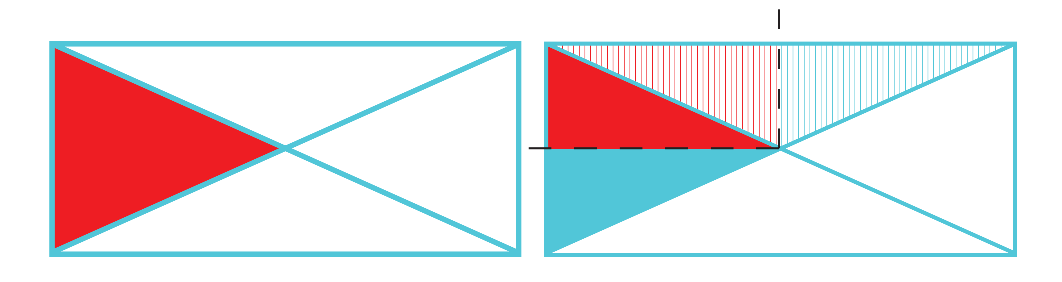


SOLUTION 4

SURFACES



Puisque la partie rouge est complètement contenue dans une autre tranche, elles n'ont pas la même aire ; donc la partie rouge ne représente pas le quart de l'ellipse.



Coupons la partie rouge en deux triangles qui sont égaux par symétrie du rectangle.
Ces deux triangles se replacent parfaitement dans tous les autres morceaux de la découpe.
La partie rouge représente donc le quart du rectangle.

SOLUTION 5

TIGRES ET PRINCESSES

1 IL N'Y A PAS DE PRINCESSE DANS CETTE CELLULE	2 IL N'Y A AUCUN TIGRE

PREMIÈRE ÉNIGME :

Supposons que les deux affiches disent la vérité :

L'affiche 1 dit qu'il n'y a pas de princesse dans la cellule 1 ; comme les cellules ne peuvent pas être vides, il y a donc un tigre dans la cellule 1. Or, ceci contredit l'affiche 2 qui prétend qu'il n'y a aucun tigre. On en déduit donc que les deux affiches mentent.

Comme l'affiche 1 ment, la princesse est bien dans la cellule 1 (et le tigre dans la cellule 2).

1 IL Y A UN TIGRE DANS L'AUTRE CELLULE	2 IL Y A UN TIGRE DANS UNE CELLULE

SECONDE ÉNIGME :

Supposons qu'il y a une princesse dans la cellule 1 ; donc l'affiche 1 dit la vérité et donc il y a un tigre dans la cellule 2.

Comme il y a un tigre dans la cellule 2, l'affiche 2 ment. Sauf qu'il y a bien un tigre dans une cellule, la cellule 2 en l'occurrence, donc l'affiche ne ment pas et il y a une contradiction.

Supposons alors qu'il y a un tigre dans la cellule 1 ; donc l'affiche 1 ment et il y a bien un tigre dans la cellule 1. De plus, comme il y a un tigre dans la cellule 1, l'affiche 2 dit la vérité. La princesse se trouve donc dans la cellule 2.

Librement inspiré de « Le livre qui rend fou », Raymond Smullyan, Dunod, 1999

Dis?
Ça t'arrive d'imaginer
que t'es un loup-garou?
?

C'est la pleine lune, tu es devenue une bête sauvage
Aux crocs luisants et aux griffes acérées.
Tu cours dans la forêt,
Sentant le vent dans tes poils,
humant la nuit!



SOLUTION 6

LE CHEVALIER DE MĒRĒ

L'idée géniale de Pascal consiste à considérer non seulement le passé du jeu, mais également à imaginer son avenir.

… la première chose qu'il faut considérer est que l'argent que les joueurs ont mis en jeu ne leur appartient plus, car ils en ont quitté la propriété ; mais ils ont en revanche le droit d'attendre ce que le hasard peut leur en donner suivant les conditions dont ils sont convenus d'abord. (Blaise Pascal)

VOICI SON RAISONNEMENT :

Imaginons que les joueurs jouent encore un coup et que les gains soient partagés ensuite.

Pascal commence donc par s'intéresser à une partie presque terminée.

Comme Méré a déjà gagné 2 points tandis que son ami n'en a obtenu qu'un seul, si Méré gagne le coup de jeu non effectué, alors il remporte 3 points et empoche donc les 64 pistoles.

Si par contre son ami gagne ce coup fictif, les deux joueurs sont à égalité et doivent donc se répartir équitablement la somme, soit 32 pistoles chacun. Méré peut donc affirmer que quelle que soit l'issue du coup non joué, il gagne au minimum 32 pistoles, mais peut en espérer le double.

A l'inverse son ami risque de tout perdre, mais a une chance sur deux de gagner 32 pistoles.

Il s'agit donc de diviser équitablement les gains espérés de chacun et d'attribuer à chacun les gains assurés.

Si la partie s'interrompt à ce moment, Méré doit obtenir 32 + 16 = 48 pistoles, alors que son ami n'en obtient que 16.

On a retrouvé ces considérations dans des lettres de Blaise Pascal à Pierre de Fermat, un autre illustre mathématicien.

Ces réflexions sont considérées comme une des premières tentatives de formalisation de calculs de probabilité.

SOLUTION 7

POMMES - POIRES - ABRICOTS...

CE PROBLÈME COMPORTE DEUX SOLUTIONS. VOICI LA PREMIÈRE :

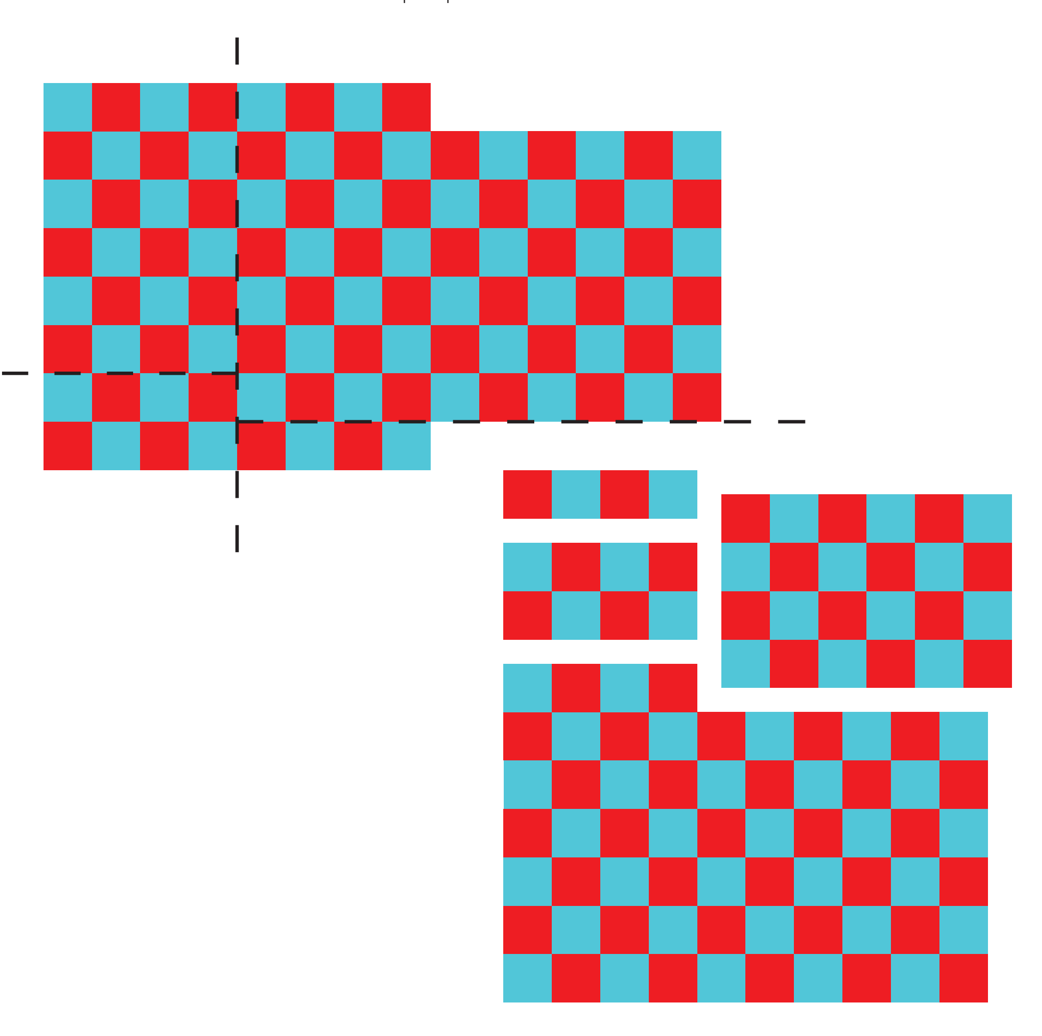
	FRUIT	48620
+	ROUGE	+89653
	CERISE	138273

POUR LA DEUXIÈME ET POUR LA RÉSOLUTION DÉTAILLÉE,
RENDEZ-VOUS SUR RTSDECOUVERTE.CH
PROBLÈME DU MOIS DE FÉVRIER 2012.

SOLUTION 8

LE TAPIS

Le nombre minimal de pièces est 4.
Voici l'une des nombreuses découpes possibles :



Librement inspiré de The Mayor of Uglyville's Dilemma : And Other Mathematical Puzzles and Enigmas, Ian Stewart, Atlantic Books, 2005.

SOLUTION 9

LES DĒS DE LA CHANCE

Pour déterminer si un jeu est équitable, il existe un objet mathématique appelé Espérance.

L'Espérance est la somme des gains et des pertes pondérés par leurs probabilités respectives.

Elle permet de répondre à la question « quel gain moyen (ou perte moyenne) puis-je espérer si je joue à ce jeu ? ». Ainsi, lorsque l'Espérance est égale à 0, le jeu est dit équitable.

En jouant à ce jeu, on a 1 chance sur 36 de faire un bénéfice de 19 francs et 35 chances sur 36 de perdre 1 franc.

ON CALCULE ALORS L'ESPÉRANCE :

$$E(jeu) = 19 \cdot \frac{1}{36} + (-1) \cdot \frac{35}{36} = -\frac{16}{36} = -\frac{4}{9}$$

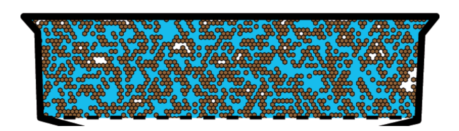
Comme l'Espérance est négative, si on joue à ce jeu on va perdre en moyenne 4/9 franc, autrement dit environ 45 centimes.

Pour que ce jeu soit équitable, il faudrait faire un bénéfice de 35 francs.

SOLUTION 10

UNE TASSE DE CAFÉ ?

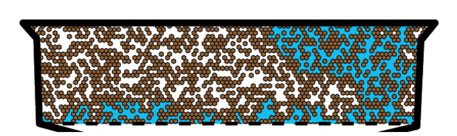






Le café n'est pas assez tassé, l'eau passe très facilement et les arômes n'ont pas le temps de se diffuser dans l'eau.
En choisissant cette cafetière, vous obtenez du jus de chaussette.

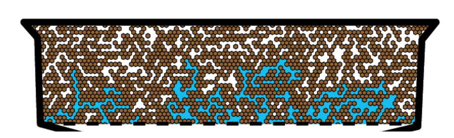






Le café est suffisamment tassé pour que l'eau passe difficilement et que les arômes prennent le temps de se diffuser.
Vous obtenez ainsi un bon café serré.







Le café est trop tassé donc l'eau ne peut pas passer au travers du café.
Pas de café avec cette cafetière !